

# ОБОБЩЕННАЯ ПОЛИФАЗНАЯ СТРУКТУРА КОСИНУСНО-МОДУЛИРОВАННОГО БАНКА ФИЛЬТРОВ

Вашкевич М.И., Петровский А.А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
ул. П.Бровки, 6, БГУИР, каф. ЭВС, 220013, Минск Беларусь, E-mail: palex@bsuir.by.

## Реферат

Рассматривается обобщенная полифазная структура косинусно-модулированного банка фильтров (КМБФ), в которой в качестве элемента задержки выступает фазовое звено. Данная обобщенная полифазная структура КМБФ описывается неравнополосный банк фильтров, получающийся путем деформации частотной оси. Показывается способ уменьшения вычислительной сложности блока косинусной модуляции КМБФ.

## Введение

В последние два десятилетия системы анализа/синтеза с использованием банков фильтров получили широкое распространение [1]-[2]. Что обусловлено гибкостью и удобством обработки и анализа сигналов при помощи банков фильтров. Большую популярность получили банки фильтров, основанные на принципах модуляции, где фильтры анализа и синтеза образуются путем модуляции КИХ фильтра-прототипа.

В работе рассматривается банк фильтров, построенный на основе косинусной модуляции фильтра-прототипа [3]. Эта идея позволяет свести проектирование целого банка фильтров к расчету одного КИХ фильтра-прототипа. Также в рассматриваемом банке фильтров в качестве элемента временного сдвига используется фазовое звено

$$A(z) = \frac{\alpha + z^{-1}}{1 + \alpha z^{-1}}, \quad |\alpha| \leq 1, \quad A(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)}.$$

Как было показано в [4], использование фазового звена как элемента задержки позволяет получать неравнополосный банк фильтров за счет деформации частотной оси:

$$\omega \mapsto \varphi(\omega),$$

где

$$\varphi(\omega) = -\omega + 2\arctg(\alpha \sin \omega / (\alpha \cos \omega - 1)).$$

Таким образом, использование в банке фильтров фазовых звеньев является естественным обобщением операции временного сдвига, поскольку единичная задержка  $z^{-1}$  является частным случаем фазового звена при  $\alpha = 0$  (соответствующий данному значению банк фильтров является равнополосным).

Импульсные характеристики фильтров анализа  $h_k[n]$  и синтеза  $f_k[n]$  КМБФ имеют следующий вид:

$$h_k[n] = h[n] \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{M}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) + (-1)^k \frac{\pi}{4}\right), \quad (1)$$

$$f_k[n] = h[n] \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{M}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) - (-1)^k \frac{\pi}{4}\right), \quad (2)$$

где  $N$  – порядок фильтра-прототипа,  $k = 0 \dots M-1$  номер канала,  $n = 0 \dots N-1$ ,  $h[n]$  – коэффициенты фильтра-прототипа.

## Обобщенная полифазная структура КМБФ

Интерес к КМБФ [2-5] объясняется хорошо разработанной теорией алгоритмов их реализации. В работе [3] предлагается эффективная схема реализации КМБФ на основе полифазного представления фильтра-прототипа. Для случая, когда порядок фильтра-прототипа  $N = 2mM$ , где  $m$  – произвольное положительное число, выражение для банка фильтров анализа можно записать в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,N-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{M-1,0} & c_{M-1,1} & \cdots & c_{M-1,N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_C} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & A(z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{N-1}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[N-1] \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $c_{k,n} = \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{M}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) + (-1)^k \frac{\pi}{4}\right)$  компоненты матрицы косинусной модуляции  $\mathbf{M}_C$ , а в качестве элементов задержки используются фазовые звенья  $A(z)$ . Из свойства периодичности функции косинус следует, что

$$c_{k,(l+2pM)} = (-1)^p c_{k,l}.$$

Это выражение позволяет представить матрицу косинусной модуляции  $\mathbf{M}_C$  в блочном виде

$$\mathbf{M}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{C} & \mathbf{C} & -\mathbf{C} & \cdots \end{bmatrix}}_{t \text{ повторений}}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{C} = [c_{k,n}]_{0 \leq k < M, 0 \leq n < 2M}$ . Регулярная структура матрицы косинусной модуляции дает возможность записать её в виде следующего произведения:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2M} & -\mathbf{I}_{2M} & \mathbf{I}_{2M} & -\mathbf{I}_{2M} & \cdots \end{bmatrix}}_{t \text{ повторений}}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{I}_n$  – единичная матрица  $n$ -го порядка. Вычисление по формуле (5) требует в  $t$  раз меньше операций умножения по сравнению с (4). Далее выражение для банка фильтров анализа с учетом подстановки (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} &= \mathbf{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2M} & -\mathbf{I}_{2M} & \mathbf{I}_{2M} & -\mathbf{I}_{2M} & \cdots \end{bmatrix}}_{t \text{ повторений}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & A(z) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A^{N-1}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[N-1] \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{C} \cdot \begin{bmatrix} h[0] - A^{2M}(z)h[2M] + \cdots \\ A(z)h[1] - A^{2M+1}(z)h[2M+1] + \cdots \\ \vdots \\ A^{2M-1}(z)h[2M-1] - A^{4M-1}(z)h[4M-1] + \cdots \end{bmatrix}, \quad (6) \end{aligned}$$

Последнее выражение служит основой для построения полифазной структуры обобщенного КМБФ. Элементами вектора-столбца в последнем выражении служат т.н. полифазные компоненты фильтра-прототипа. Аналогичное выражение может быть получено и для банка фильтров синтеза.

Эффективность полифазной структуры банка фильтров заключается в возможности построения быстрого алгоритма для вычисления матрицы косинусной модуляции. Под быстрым алгоритмом понимается представление матрицы  $\mathbf{C}$  в виде произведения сла-

бозаполненных матриц. В [3] показано, что матрица косинусной модуляции может быть записана в виде:

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \sqrt{M}(-1)^{m_1} \mathbf{DCT4}_M \cdot [(\mathbf{I}_M - \mathbf{J}_M) \quad -(\mathbf{I}_M - \mathbf{J}_M)] \\ \text{для четных } m \ (m = 2m_1), \\ \sqrt{M}(-1)^{m_2} \mathbf{DCT4}_M \cdot [(\mathbf{I}_M + \mathbf{J}_M) \quad (\mathbf{I}_M - \mathbf{J}_M)] \\ \text{для нечетных } m \ (m = 2m_1 + 1) \end{cases}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{DCT4}_M$  – матрица дискретного косинусного преобразования типа 4 (ДКП-4),

$$\mathbf{DCT4}_M = \left[ \sqrt{\frac{2}{M}} \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)(\ell+1/2)}{M}\right) \right]_{0 \leq k, \ell < M}, \quad \mathbf{J}_M = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Выражение (7) позволяет свести задачу реализации КМБФ к задаче синтеза быстрого алгоритма для дискретного косинусного преобразования типа 4. Наиболее общий подход к построению быстрых алгоритмов для всего семейства дискретных синусных и косинусных преобразований, основанный на привлечении методов теории групп и абстрактной алгебры, дается в [6].

Заметим, что (7) представляет собой произведение матрицы предположений на матрицу ДКП-4. При этом умножение на матрицу предположений требует  $3M$  операций сложения. Это число может быть уменьшено до  $2M$ . В качестве примера рассмотрим случай, когда  $M$  и  $m$  четные числа, тогда матрица предположений имеет блочный вид:

$$\mathbf{S}_M^e = [(\mathbf{I}_M - \mathbf{J}_M) \quad -(\mathbf{I}_M - \mathbf{J}_M)] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{J}_{M/2} & -\mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{J}_{M/2} \\ -\mathbf{J}_{M/2} & \mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{J}_{M/2} & -\mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Используя элементарные преобразования, (9) приводится к блочному ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & -1/2\mathbf{J}_{M/2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{M/2} & \mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}_M^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{J}_{M/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{J}_{M/2} & -\mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

Откуда  $\mathbf{S}_M^e$  может быть выражена как:

$$\mathbf{S}_M^e = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & \mathbf{J}_{M/2} \\ -\mathbf{J}_{M/2} & \mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{J}_{M/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{J}_{M/2} & -\mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Для реализации (11) требуется выполнение  $2M$  операций сложения. Аналогичные выражения получаются в случае, если число каналов банка фильтров  $M$  нечетно [7]. На основании (6), (7) и (11) может быть построена полифазная структура обобщенного КМБФ (рисунок 1). Через  $g_i$  на рисунке 1 обозначены коэффициенты полифазных компонент фильтра-прототипа, которые согласно (6) связаны с коэффициентами фильтра-прототипа соотношением

$$g_{q+2rM} = (-1)^r h[q+2rM], \quad 0 \leq q < M, \quad 0 \leq r < m.$$

Аналогичная полифазная структура может быть получена для банка фильтров синтеза.

## Выводы

Рассмотрена обобщенная полифазная структура КМБФ, в которой в качестве элементов задержки выступают фазовые звенья. Показано, что для  $M$ -канального КМБФ количество сложений для вычисления матрицы косинусной модуляции может быть сокращено на  $M$  операций. Полученные результаты могут быть использованы для создания системы структурного синтеза неравнополосных косинусно-модулированных банков фильтров.

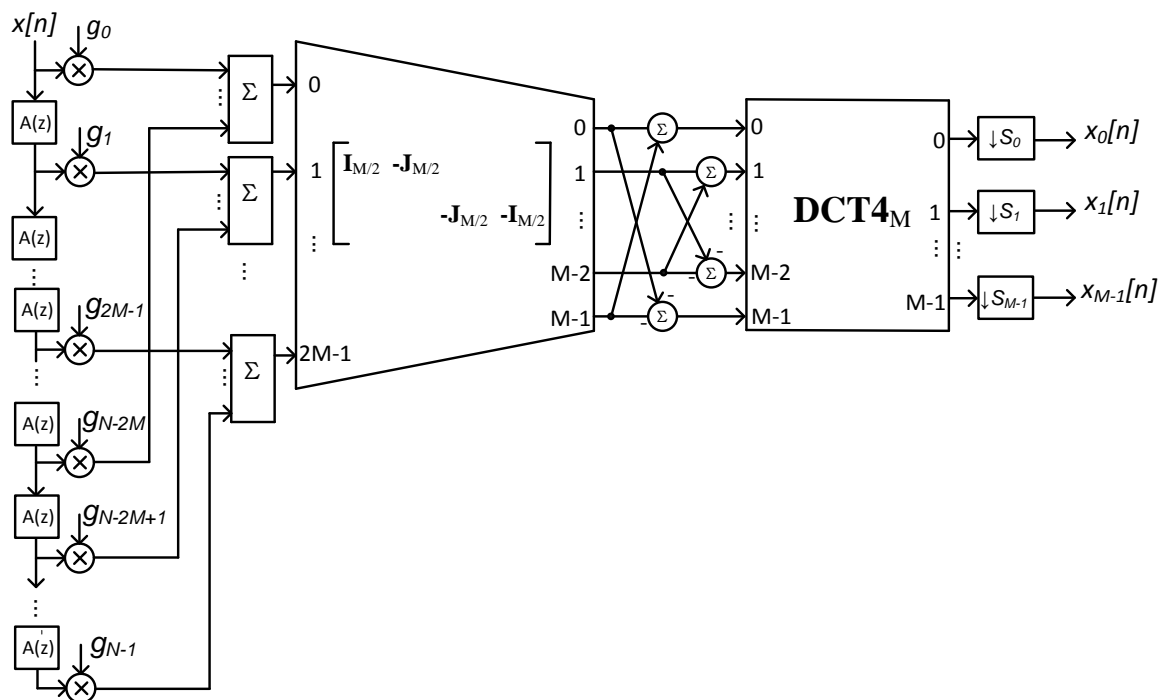


Рисунок 1 – Обобщенная полифазная структура КМБФ

#### Литература

1. Вайдьянатхан, П. П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией: Методический обзор / ТИИЭР. – 1990. – №3. – С. 77-119.
2. Piotrowski A., Parfieniuk M., Digital filter banks: analysis, synthesis and implementation for multimedia systems / Wydawnictwo Politechniki Bialostockiej, Bialystok, 2006. – С. 389.
3. Koilpillai D., Vaidyanathan P.P. Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction / IEEE transaction on signal processing. – 1992. – vol. 40 – № 4. – P. 770-783.
4. Bielawski K., Petrovsky A.A. Speech enhancement system for hands-free telephone based on the psychoacoustically motivated filter bank with allpass frequency transformation / Proc. 6<sup>th</sup> European Conf. on speech communication and technology, EUROSPEECH'99, Budapest, Hungary, – 1999 – P. 2555-2558.
5. Парфенюк М., Вашкевич М.И, Петровский А.А. Проектирование банка фильтров для слуховых аппаратов с использованием частотного растяжения и объединения субполос // глава в монографии «Анализаторы речевых и звуковых сигналов: методы, алгоритмы и практика» под ред. Петровского А.А.– Минск: Бестпринт,2009. – С. 331-351.
6. Püschel M., Moura J.M.F. Algebraic Signal Processing Theory: Cooley-Tukey Type Algorithms for DCTs and DSTs / IEEE Transactions on Signal Processing. – 2008. – Vol. 56, № 4. – P. 1502-1521.
7. Вашкевич М.И., Петровский А.А. Неравнополосные банки фильтров для слуховых аппаратов: анализ алгоритмов, автоматизация проектирования / Автоматизация проектирования дискретных систем: материалы 7-й междунар. конф., Беларусь, Минск, 16-17 нояб. 2010 г. – С. 53-60.

## GENERAL POLYPHASE STRUCTURE OF COSINE-MODULATED FILTER BANK

Vashkevich M.I., Petrovsky A.A.

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**Abstract.** A general polyphase structure of cosine-modulated filter bank (CMFB) with delay elements replaced by allpass filters is considered. This structure enables to describe warped cosine-modulated filter banks. The method for reducing computational complexity of cosine modulation block of CMFB is proposed.